PART3　指数関数のグラフ，指数関数の性質

例題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[8]{32}$　　(2)　$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$，$\frac{1}{\sqrt[4]{243}}$，1

Point Pickup

練習

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{27}$，$\sqrt[7]{243}$

(2)　2^{-1}，1，$\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}$

第11講　PART3 確認問題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

1　$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[3]{16}$，$\sqrt[6]{32}$

ア

① $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[6]{32}$

② $\sqrt[3]{4} < \sqrt[6]{32} < \sqrt[3]{16}$

③ $\sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[6]{32}$

④ $\sqrt[6]{32} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{4}$

2　3^{-2}，1，$\sqrt[6]{\dfrac{1}{243}}$

イ

① $1 < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}} < 3^{-2}$

② $1 < 3^{-2} < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}}$

③ $3^{-2} < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}} < 1$

④ $3^{-2} < 1 < \sqrt[6]{\dfrac{1}{243}}$

PART3　指数関数のグラフ，指数関数の性質

例題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[8]{32}$　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}$, 1

(1) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$,　$\sqrt[4]{8}=(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$,　$\sqrt[8]{32}=(2^5)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{5}{8}}$

指数の大小について　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{8}<\dfrac{3}{4}$

底 2 は 1 より大きいから　$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{5}{8}}<2^{\frac{3}{4}}$

よって　$\sqrt{2}<\sqrt[8]{32}<\sqrt[4]{8}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$,　$\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{243}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$,　$1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$

指数の大小について　$0<\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{4}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}<1$

練習

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{27}$，$\sqrt[7]{243}$　　(2)　2^{-1}，1，$\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}$

(1)　$\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$，　$\sqrt[5]{27}=(3^3)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{3}{5}}$，　$\sqrt[7]{243}=(3^5)^{\frac{1}{7}}=3^{\frac{5}{7}}$

指数の大小について　$\dfrac{3}{5}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{7}$

底 3 は 1 より大きいから　$3^{\frac{3}{5}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{5}{7}}$

よって　$\sqrt[5]{27}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[7]{243}$

(2)　$2^{-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1$，　$1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$，　$\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\right\}^{\frac{1}{8}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

指数の大小について　$0<\dfrac{3}{4}<1$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^1<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

よって　$2^{-1}<\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}<1$

第11講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$\sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$， $\sqrt[3]{16}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$，

$\sqrt[6]{32}=(2^5)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{5}{6}}$ [A]

指数の大小について

$$\frac{2}{3}<\frac{5}{6}<\frac{4}{3}$$

底2は1より大きいから [A]

$$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{5}{6}}<2^{\frac{4}{3}}$$

よって $\boldsymbol{\sqrt[3]{4}<\sqrt[6]{32}<\sqrt[3]{16}}$

[A] 指数で表された数の大小比較は，「底」を揃えた上で，指数関数の性質
・$a>1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$
を利用して行う。

2

[正解] イ：③

[解説]

$3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$， $1=\left(\frac{1}{3}\right)^0$，

$\sqrt[6]{\frac{1}{243}}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$ [B]

指数の大小について

$$0<\frac{5}{6}<2$$

底 $\frac{1}{3}$ は0より大きく1より小さいから [B]

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{6}}<\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

よって $\boldsymbol{3^{-2}<\sqrt[6]{\frac{1}{243}}<1}$

[B] 指数で表された数の大小比較は，「底」を揃えた上で，指数関数の性質
・$a>1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$
を利用して行う。